Теория. Развёрнутый стиль

Урок 3. Начала теории вероятностей

Первая часть урока посвящена практическим задачам на вычисление вероятностей (это задание 5 ЕГЭ по математике базового уровня).

Для решения таких задач нужно уметь находить отношение числа благоприятных для наступления некоторого события исходов к числу всех равновозможных исходов.

Кроме того необходимо знать следующие правила.

- Вероятность события $\bar{A}$, противоположного событию A, можно найти по формуле $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- Если события X и Y несовместны, то $P(X+Y) = P(X) + P(Y)$.
- Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Пример. В коробке лежит 10 одинаковых по внешнему виду конфет, в трёх из которых нет фруктовой начинки. Ваня берёт одну конфету. Найдите вероятность того, что в этой конфете будет фруктовая начинка.

Решение. Число конфет с фруктовой начинкой равно 7, число всех конфет равно 10. Поэтому искомая вероятность равна 0,7.

Ответ: 0,7.

Пример. На экзамене будет 25 билетов, Оксана не выучила 6 из них. Найдите вероятность того, что ей попадётся выученный билет.

Решение. Число выученных билетов равно 19, число всех билетов равно 25. Поэтому искомая вероятность равна $\dfrac{19}{25} = 0{,}76$.

Ответ: 0,76.

Пример. В чемпионате по гимнастике участвуют 70 спортсменок: 25 из США, 17 из Мексики, остальные из Канады. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Канады.

Решение. Число спортсменок из Канады равно $70-25-17=28$. Поскольку искомая вероятность P равна отношению числа $n = 28$ благоприятных для данного события исходов к числу $N = 70$ всех равновозможных исходов, находим $P = \dfrac{28}{70} = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$.

Ответ: 0,4.

В некоторых случаях условие задачи основано на числовых отношениях, из которых и нужно определить число благоприятных для искомого события случаев к числу всех равновозможных.

Пример. На конюшне есть только орловские лошади и пони, причём пони в 19 раз меньше, чем лошадей. Найдите вероятность того, что случайно выбранное на этой конюшне животное окажется пони.

Решение. Если на конюшне x пони, то лошадей $19x$, а всего животных $x + 19x = 20x$. Тогда вероятность случайно выбрать пони равна $\dfrac{x}{20x} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05$.

Ответ: 0,05.

Пример. В групповой экскурсии по Эрмитажу участвуют представители только трёх стран: Англии, Франции, Испании. Известно, что испанцев в 4 раза меньше, чем французов, а число англичан относится к числу французов как $5 : 12$. Найдите вероятность того, что случайно встреченный по завершении этой экскурсии её участник окажется испанцем.

Решение. Если обозначить число англичан через $5x$, то число французов будет равно $12x$, а число испанцев — $3x$. Тогда число всех участников экскурсии равно $5x + 12x + 3x = 20x$, и вероятность случайной встречи с испанцем составит $\dfrac{3x}{20x} = 0{,}15$.

Ответ: 0,15.

При вычислении вероятностей порой приходится иметь дело и с процентами.

Пример. На птицеферме разводят кур, уток и гусей. Известно, что число уток и число гусей соответственно на 30% и 70% меньше числа кур. Найдите вероятность того, что случайно увиденная на этой птицеферме птица окажется гусем.

Решение. Если обозначить число кур через x, то число уток будет равно $0{,}7x$, а число гусей — $0{,}3x$. Значит, всего птиц на птицеферме $x+0{,}7x+0{,}3x=2x$. Поэтому вероятность случайно увидеть гуся равна $\dfrac{0{,}3x}{2x}=0{,}15$.

Ответ: 0,15.

Пример. На фабрике керамической посуды 5% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка окажется с дефектом. Результат округлите до сотых.

Решение. Пусть всего произведено x тарелок. Тогда $0{,}05x$ тарелок имеют дефект, а $0{,}95x$ тарелок — без дефекта. Из $0{,}05x$ дефектных тарелок при контроле качества выявляется $0{,}8\cdot 0{,}05x=0{,}04x$ тарелок, а не выявляется $0{,}05x-0{,}04x=0{,}01x$ тарелок. Эти не выявленные тарелки, а также тарелки без дефекта поступают в продажу, то есть всего в продажу поступает $0{,}95x+0{,}01x=0{,}96x$ тарелок. При случайном выборе вероятность выбрать тарелку с дефектом равна $\dfrac{0{,}01x}{0{,}96x}=\dfrac{1}{96}\approx 0{,}01$.

Ответ: 0,01.

Числа и их свойства

Задание 19 ЕГЭ по математике базового уровня представляет собой задачу с логической составляющей на делимость целых чисел. Как правило, она имеет не единственное решение, но находить все решения необязательно: достаточно найти какое-нибудь одно и записать полученное число в ответ. Соответственно, важным элементом решения такой задачи является умение выполнять логический перебор, а необходимым условием — знание признаков делимости и основных свойств делимости целых чисел. Напомним основные признаки делимости, которые используются при решении задания 19.

Признаки делимости

- Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2, то есть число является чётным.
- Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

- Число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры являются нулями или образуют число, делящееся на 4.
- Число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последней цифрой является 0 или 5.
- Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Рассмотрим несколько характерных примеров.

Пример. На шести карточках написаны цифры $1; 1; 2; 3; 5; 8$ (по одной цифре на каждой карточке). В выражении $\square + \square\square + \square\square\square$ вместо каждого квадратика положили карточку из данного набора. Оказалось, что полученная сумма делится на 20. В ответе укажите какую-нибудь одну такую сумму.

Решение. Обозначим полученную сумму буквой s. По условию число s делится на 20, а значит, и на 2, 4, 5, 10. Поэтому его последней цифрой может быть только 0. Значит, на первом шаге нужно выбрать из данных шести чисел три, сумма которых оканчивается нулём, и поставить их на последние места в каждом из слагаемых выражения. Такими числами могут быть 1, 1, 8 или 2, 3, 5. Поскольку число s должно делиться на 4, его предпоследняя цифра должна быть чётной. Рассмотрим первый набор, например, в виде $1+{*}1+{*}{*}8$. При сложении этих чисел в предпоследний разряд суммы добавится единица, поэтому на предпоследних местах второго и третьего слагаемых могут быть только числа, которые при сложении с единицей дадут в сумме чётное число. Из оставшихся чисел 2, 3, 5 таким свойством обладают, например, числа 2 и 5. Таким образом, одной из искомых сумм является, например, $1 + 21 + 358 = 380$.

Ответ: 380.

Для решения следующего примера воспользуемся логическим перебором.

Пример. Найдите трёхзначное натуральное число, которое при делении и на 3, и на 5, и на 7 даёт в остатке 1 и цифры в записи которого расположены в порядке убывания слева направо. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Решение. Из условия следует, что если такое число a уменьшить на 1, то результат должен делиться на 3, 5 и 7, то есть число $a-1$ кратно числу $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. Будем записывать в таблице такие числа и число a в порядке возрастания, пока в одной из строк не получим требуемый результат:

$a-1$	a
105	106
$105 \cdot 2 = 210$	211
$105 \cdot 3 = 315$	316
$105 \cdot 4 = 420$	421

Ответ: 421.

Пример. Приведите пример трёхзначного числа, сумма цифр которого равна 19, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9.

Решение. Остаток от деления натурального числа на 3 равен либо 0 (если число делится на 3), либо 1 или 2 (если число не делится на 3). Поэтому остаток от деления квадрата натурального числа на 3 равен либо 0 (если число делится на 3), либо 1 (если число не делится на 3). Поэтому сумма квадратов трёх натуральных чисел делится на 3, только если каждое из этих чисел делится на 3 (но тогда сумма их квадратов делится на 9, что противоречит условию), либо если ни одно из этих чисел не делится на 3. Попробуем подобрать три натуральных числа, меньших 10, ни одно из которых не делится на 3 и сумма которых равна 19, начав с наибольшего из возможных, 8. Тогда следующим по убыванию будет 7, и, значит, последнее число — это 4. Проверкой легко убедиться, что сумма квадратов найденных чисел (она равна 129) на 9 не делится. Ответом может быть любое трёхзначное число, составленное из цифр 8, 7, 4, например, 874.

Ответ: 874.

Пример. Вычеркните в числе 48 725 459 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 15. В ответе укажите какое-нибудь одно получившееся число.

Решение. Искомое число должно делиться на 3 и на 5. Поэтому сумма его цифр должна делиться на 3, а его последней цифрой в данном случае может быть только 5. Если вычеркнуть три последние цифры, получим число 48 725, которое делится на 5, но не делится на 3. Значит, остаётся единственная возможность получить цифру 5 в качестве последней цифры искомого числа — вычеркнуть цифру 9 в конце данного числа. Получим число 4 872 545, сумма цифр которого при делении на 3 даёт в остатке 2. Теперь нужно вычеркнуть две любые цифры (кроме последней), сумма которых при делении на 3 даёт в остатке 2, например, две четвёрки (получим число 87 255) или 4 и 7 (получим 82 545 или 48 255).

Ответ: 87 255, или 82 545, или 48 255.

Пример. Найдите четырёхзначное число, кратное 12, произведение цифр которого равно 10. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Решение. Искомое число должно делиться на 3 и на 4. Единственным набором из четырёх цифр, произведение которых равно 10, является набор из двух единиц, двойки и пятёрки. Сумма $1 + 1 + 2 + 5$ равна 9 и, значит, делится на 3. Остаётся составить из этих цифр четырёхзначное число, которое делится на 4. Для этого две последние цифры искомого числа должны образовывать двузначное число, делящееся на 4. Таких возможностей всего две: 12 и 52. Первая из них даёт числа 1512 и 5112, вторая — число 1152.

Ответ: 1512, или 5112, или 1152.

Пример. Найдите шестизначное натуральное число, которое записывается только цифрами 0 и 6 и делится на 90. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Решение. Искомое число должно делиться на 9 и на 10. Поэтому сумма его цифр должна делиться на 9, а его последней цифрой в данном случае может быть только 0. Значит, шестёрок в записи этого числа меньше 6. Единственным набором, сумма чисел которого делится на 9, в данном случае будет набор из трёх шестёрок и трёх нулей. Значит, искомое число оканчивается нулём, а его десятичная запись состоит из трёх нулей и трёх шестёрок. Несложно подобрать все такие числа: 666 000; 606 600; 660 600; 600 660; 606 060; 660 060.

Ответ: 666 000; 606 600; 660 600; 600 660; 606 060; 660 060.

