Кинематика. Конспект теории

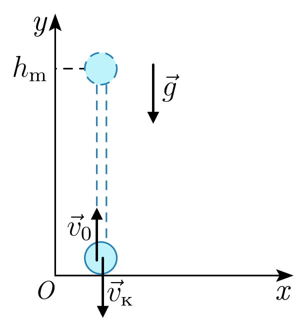
Движение тела, брошенного вертикально вверх и брошенного горизонтально

Тело, брошенное вертикально вверх или падающее с некоторой высоты, движется с ускорением, равным ускорению свободного падения. Так как ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли остаётся примерно одинаковым, подобное движение можно считать равноускоренным.

Пример 1

Тело брошено вертикально вверх со скоростью v_0. Найти время подъёма, время полёта, максимальную высоту и конечную скорость.

Решение.



Выберем Землю в качестве тела отсчёта. Поместим в начало координат некоторую точку O, находящуюся на Земле, ось y направим вертикально вверх, а ось x направим так, чтобы тело в начальный момент времени находилось на этой оси. Так как вблизи поверхности Земли тела двигаются с постоянным ускорением $\vec{g}$, направленным вниз, то для проекции ускорения получаем $a_y = -g$. Так как тело бросается вертикально вверх из точки, находящейся на оси x, то $y_0 = 0$ и $v_{0y} = v_0$. Отсюда из уравнений равноускоренного движения получаем:

$$\begin{cases} y = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}, \\ v_y = v_0 - gt. \end{cases}$$

1. Найдём время $t_{\text{под}}$ подъёма тела. Так как при движении вверх проекция скорости v_y положительная, при движении вниз — отрицательная, а движение тела непрерывное, то в наивысшей точке подъема знак v_y меняется на противоположный. Следовательно, в наивысшей точке подъёма выполнено $v_y = 0$. Из уравнения для проекции скорости получаем получаем
$$v_0 - gt = 0,$$
отсюда получаем время подъёма
$$t = t = \frac{v_0}{g}.$$

2. Найдём время полёта тела $t_{\text{пол}}$. Так как конечная точка траектории находится на оси x, то $y(t_{\text{пол}}) = 0$, следовательно, $t_{\text{пол}}$ удовлетворяет уравнению
$$v_0 t - \frac{gt^2}{2} = 0.$$
Так как $t_{\text{пол}} \neq 0$, получаем
$$v_0 - \frac{gt}{2} = 0;$$
$$t = t_{\text{пол}} = \frac{2v_0}{g}.$$
Как видно из вычислений, время полёта оказалось в 2 раза больше времени подъёма:
$$t_{\text{пол}} = 2t_{\text{под}}.$$

3. Найдём максимальную высоту h_m подъёма тела. Так как $h_m = y(t_{\text{под}})$ и $t = \dfrac{v_0}{g}$, то
$$h_m = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{gv_0^2}{2g^2};$$
$$h_m = \frac{v_0^2}{2g}.$$

4. Наконец, найдём конечную скорость $v_{\text{к}}$ тела. Так как движение тела происходит вдоль оси y, то скорость v в любой момент времени равна модулю проекции скорости на эту ось. Следовательно, чтобы найти конечную скорость тела, нужно подставить время полёта $t_{\text{пол}} = \dfrac{2v_0}{g}$ в закон изменения проекции скорости и взять модуль от полученной величины:
$$v_{\text{к}} = |v_y(t_{\text{пол}})| = \left| v_0 - g\frac{2v_0}{g} \right| = |v_0 - 2v_0| = |-v_0| = v_0.$$

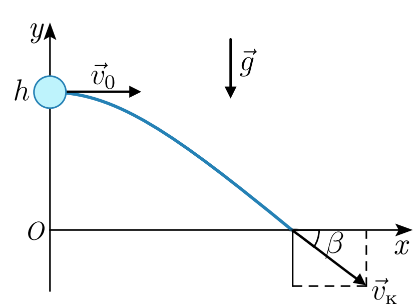
Ответ: $t_{\text{под}} = \dfrac{v_0}{g}; t_{\text{пол}} = \dfrac{2v_0}{g} = 2t_{\text{под}}; h_m = \dfrac{v_0^2}{2g}; v_{\text{к}} = v_0.$

Тело, брошенное горизонтально, двигается равноускоренно, но не прямолинейно. По оси x тело будет двигаться с постоянной скоростью, а по оси y — с постоянным ускорением, равным ускорению свободного падения. Таким образом, два тела, одно из которых брошено горизонтально, а другое одновременно с ним с той же высоты начинает падение вниз, упадут на землю одновременно.

Пример 2

Тело брошено с начальной скоростью v_0 горизонтально с высоты h. Найти время полёта, дальность, конечную скорость, угол наклона конечной скорости к горизонту и уравнение траектории.

Решение.



В качестве тела отсчёта выберем Землю. Пусть начало координат — находящаяся на Земле точка O — и ось y, направленная вертикально вверх, выбраны так, что тело в начальный момент времени находится на оси y. Пусть ось x направлена таким образом, чтобы вектор скорости $\vec{v}_0$ лежал в плоскости Oxy. Тогда движение тела также будет происходить в этой плоскости. Так как у поверхности Земли тела движутся с ускорением $\vec{g}$, направленным вертикально вниз, получаем, что проекции ускорения тела равны $a_x = 0$ и $a_y = -g$. Выпишем начальные условия: $x_0 = 0$, $y_0 = h$, $v_{0x} = v_0$, $v_{0y} = 0$. Отсюда из уравнений равноускоренного движения получаем:

$$\begin{cases} x = v_0 t, \\ v_x = v_0, \\ y = h - \dfrac{gt^2}{2}, \\ v_y = -gt. \end{cases}$$

1. Найдём время полёта тела $t_{\text{пол}}$. Так как конечная точка траектории лежит на Земле, то $t_{\text{пол}}$ удовлетворяет уравнению $y(t) = 0$. Отсюда получаем

$$h - \frac{gt^2}{2} = 0;$$

$$t = t_{\text{пол}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

2. Найдём дальность полёта тела L. Заметим, что дальность полёта равна абсциссе конечной точки траектории тела. Следовательно, чтобы найти дальность полёта, нужно подставить в уравнение $x = x(t)$ время полёта $t = t_{\text{пол}}$:

$$L = x(t_{\text{пол}});$$

$$L = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

3. Найдём модуль конечной скорости тела. Пусть $v_{\text{к}x}$ и $v_{\text{к}y}$ — проекции конечной скорости $\vec{v}_{\text{к}}$ на оси x и y соответственно. По формуле для модуля вектора находим

$$v_{\text{к}} = \sqrt{v_{\text{к}x}^2 + v_{\text{к}y}^2}.$$

Так как конечная скорость достигается при $t = t_{\text{пол}}$, получаем

$$v_{\text{к}x} = v_{0x} = v_0,$$

$$v_{\text{к}y} = v_y(t_{\text{пол}}) = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}.$$

Следовательно,

$$v_{\text{к}} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

4. Найдём угол наклона конечной скорости к горизонту β. Построим на векторе $\vec{v}$ прямоугольный треугольник с катетами, параллельными осям координат (см. рисунок).

Тогда прилежащий катет равен $|v_{\text{к}x}| = v_0$, а противолежащий — $|v_{\text{к}y}| = \sqrt{2gh}$. Так как тангенс угла β — это отношение противолежащего катета к прилежащему, получаем

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|v_{\text{к}y}|}{|v_{\text{к}x}|};$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0};$$

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2gh}}{v_0}.$$

5. Наконец, выведем уравнение траектории тела. Уравнение траектории имеет вид $y = y(x)$. Чтобы получить уравнение такого вида, нужно выразить время t через x и подставить в уравнение движения $y = y(t)$. Так как $x = v_0 t$, то $t = \dfrac{x}{v_0}$. Отсюда

$$y = h - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Выведенное уравнение показывает, что траекторией движения тела является парабола, ветви которой направлены вниз.

Ответ: $t_{\text{пол}} = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$; $L = v_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$; $v_{\text{к}} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$; $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2gh}}{v_0}$; $y = h - \dfrac{gx^2}{2v_0^2}$.